**CONCOURS D'ENTREE A - 2002**

**EPREUVE de MATHEMATIQUES 1**

Durée 2 heures

(tous les candidats)

---

L'usage des calculatrices est interdit.

Les trois parties sont largement indépendantes.

## Notations :

On note $C$ l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle continues sur $R^+$, on rappelle que $C$ est un R-espace vectoriel.

On note $P$ le plan affine euclidien, et on le rapporte à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

## Première partie :

1) A toute fonction $f \in C$, on associe la fonction $g : (R^+)^2 \to R$, telle que : $\forall (x,y) \in (R^+)^2 : g(x,y) = \int_x^y f(t).dt$.

a) Montrer que $g$ est de classe $C^1$ sur $(R^{+*})^2$.

b) Montrer que l'application $\varphi$, qui à $f$ associe $g$, est une application linéaire de $C$ sur l'espace vectoriel des fonctions de $(R^+)^2 \to R$ de classe $C^1$ sur $(R^{+*})^2$.

Quel est son noyau ? Est-elle injective ?

Est-elle surjective ?

2) On choisit une fonction $f : R \to R$, continue sur $R$.

Dans le plan $P$, on considère la courbe $\Gamma = \left\{ M(x,y) \in P \,/\, g(x,y) = \int_x^y f(t).dt = 0 \right\}$.

a) Montrer que $\Gamma$ admet un axe de symétrie dont les points appartiennent à $\Gamma$.

b) Soit $f(t) = t^2 - 1$ , reconnaitre la courbe $\Gamma$ et la représenter dans le plan $P$.

3) On choisit $f \in C$, de classe $C^1$ sur $R^+$; on suppose de plus que $f'$ est strictement croissante sur $R^+$ et que $f$ s'annule en deux points $x_0$ et $x_1$ sur $R^{+*}$.$(x_0 < x_1)$

a) Montrer que $f'$ admet un et un seul zéro sur $R^+$ et qu'il appartient à $]x_0, x_1[$.

b) Soit $g(x,y) = \int_x^y f(t).dt$ , montrer que c'est une fonction de classe $C^2$ sur $(R^{+*})^2$.

c) Déterminer les points critiques de $g$ sur $(R^{+*})^2$. ( c'est à dire les points où $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ ).

d) En lesquels de ces points a-t-on des extréma locaux ?

Quelle est la nature de ces extréma ?

## Deuxième partie :

1) Etant donnée une fonction $f$ de $C$ telle que : $\forall x \in R^+ \; f(x^2) = f(x)$, on se propose de démontrer que $f$ est une fonction constante sur $R^+$.

a) Soit $a \in R^{+*}$, étudier la suite de terme général $u_n = a^{1/2^n} = a^{\frac{1}{2^n}}$.

b) En déduire la propriété énoncée ci-dessus.

2) A toute fonction $f \in C$, on associe la fonction $L(f) : R^+ \to R$, telle que :

$\forall x \in R^{+*} : L(f)(x) = \frac{1}{x} \int_x^{x^2} f(t).dt$ et $L(f)(0) = -f(0)$.

a) Montrer que $L$ est un endomorphisme de $C$.

b) $L$ est-il injectif ?

3)a) Soit $f \in C$, montrer que $L(f)$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$.

Que vaut alors la fonction dérivée $(L(f))'$ ?

L'endomorphisme $L$ est-il surjectif ?

b) On suppose $f$ dérivable en 0, montrer que la fonction $h(x) = \int_x^{x^2} f(t).dt$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

En déduire que $L(f)$ est dérivable en 0. Que vaut $(L(f))'(0)$ ?

La fonction $(L(f))$ est-elle de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$ ?

## Troisième partie :

On choisit $\varphi(x) = \exp(-x^2)$, et on note $\Phi = L(\varphi)$, c'est à dire :

$\Phi(0) = -1$ et $\forall x \in R^{+*}$ $\Phi(x) = \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \exp(-t^2).dt$.

1) Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2} = \exp(-t^2)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

En déduire la limite quand $x$ tend vers $+\infty$ de $\Phi(x)$.

2) Montrer que $\Phi$ admet un développement en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; on donnera le domaine de validité du développement, ainsi que les coefficients $a_{2n}, a_{4n+1}, a_{4n+3}$.

3) Montrer que $\Phi$ est dérivable sur $[0,+\infty[$. Donner $\Phi'$ .

4)a) Montrer que : $\forall x \in [0,1]$ $\Phi'(x) \geq 2\exp(-x^4) - \exp(-x^2)$.

En déduire le signe de $\Phi'(x)$ sur $[0,1]$.

b) Etudier les variations de la fonction $\alpha(x) = 2x\exp(x^2 - x^4) - 1$ sur $[1,+\infty[$; et montrer que cette fonction s'annule en un point $x_0 \in ]1, \frac{3}{2}[$.

En déduire le signe de $\Phi'(x)$ sur $[x_0,+\infty[$.

c) Justifier que $\Phi'(x)$ s'annule entre 1 et $x_0$ , on admet que ce zéro, noté $x_1$, est unique.

Donner le tableau de variation de $\Phi$.

Montrer que $0 \leq \Phi(x_1) \leq (x_1 - 1)\exp(-x_1^2)$ ; en déduire que $0 \leq \Phi(x_1) \leq \frac{1}{2e}$.

d) Tracer la courbe représentative de $\Phi$.( on placera les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$ , et leurs tangentes )